

DOI: <https://doi.org/10.36719/2663-4619/114/280-289>

Zöhrə Qurbanova

Azərbaycan Dövlət Neft və Sənaye Universiteti
magistrant

<https://orcid.org/0009-0006-7108-4071>
znftullayeva@gmail.com

Parabolik tənliyin məkan dəyişənlərindən asılı olan sağ tərəfinin identifikasiyası

Xülasə

Məkan dəyişənlərindən asılı olaraq parabolik tənliyin sağ tərəfinin çarpanının təyini ilə bağlı tərs məsələnin ədədi həlli üçün iterativ konjuqativ qradient üsulu təklif edilmişdir. Parabolik tənliyin sağ tərəfinin zamandan asılı olaraq ən aşağı (ən əhəmiyyətli) əmsalının və çarpanının eyni vaxtda müəyyən edilməsi üçün hesablama alqoritmi işlənilib hazırlanmışdır. Metod elliptik tənlik üçün üç sərhəd məsələsinin xətti kombinasiyası şəklində yuxarı zaman qatında təxmini həllin təqdim edilməsindən ibarətdir. Parabolik tənlik üçün davam məsələsini ədədi həll etmək üçün ikinci dərəcəli adi diferensial tənliklər üçün iki sərhəd məsələsinin həllərinin superpozisiyasına əsaslanan ədədi üsul təklif olunur.

Qeyri-müntəzəm hesablama sahəsində retrospektiv tərs istilik keçiriciliyi problemini ədədi həll etmək üçün yerli radial əsas funksiyaların əlaqəsinə əsaslanan yeni ədədi üsullar təklif olunur.

Müvafiq ədədi nümunələr təklif olunan yeni metodların effektiv olduğunu göstərir.

Açar sözlər: *parabolik tənliklər, parametr, dəyişən, metod, fərq analoqu, tərs məsələ*

Zohra Gurbanova

Azerbaijan State Oil and Industry University
Master student

<https://orcid.org/0009-0006-7108-4071>
znftullayeva@gmail.com

Identification of the Right Side of the Parabolic Equation Depending on Spatial Variables

Abstract

An iterative conjugate gradient method was proposed for the numerical solution of the inverse problem related to the determination of the multiplier of the right side of the parabolic equation depending on the spatial variables; A calculation algorithm was developed for the simultaneous determination of the lowest (most significant) coefficient and multiplier of the right side of the parabolic equation as a function of time. The method consists of providing an approximate solution in the upper time layer in the form of a linear combination of three boundary value problems for the elliptic equation; A numerical method based on the superposition of the solutions of two boundary value problems for second-order ordinary differential equations is proposed to numerically solve the continuation problem for the parabolic equation.

New numerical methods based on the relation of local radial basis functions are proposed to numerically solve the retrospective inverse heat conduction problem in the field of irregular computation.

Corresponding numerical examples show that the proposed new methods are effective.

Keywords: *parabolic equations, parameter, variable, method, difference analog, inverse problem*

Giriş

İşdə parabolik tənlik üçün ilkin-sərhəd məsələsinin həllinin məkan dəyişənlərindən asılı olan naməlum sağ tərəfi ilə təyin edilməsi üçün tərs məsələyə baxılır. Bu, zamanın son anda həllinin məlum qiyməti vasitəsilə yerinə yetirilir. Bu tərs məsələ tez-tez riyazi fizika, fiziki kimya, ətraf mühit, sosiologiya və hətta iqtisadiyyat sahələrində rast gəlinən tipik tərs məsələlərdən biridir. Belə tərs məsələlərin öyrənilməsi praktik baxımdan önəmlidir və bir çox tədqiqatçıların diqqətini cəlb edir. D. Lesnikin (Chen, 2011) əsərində məkan dəyişənlərindən asılı olan sağ tərəfin identifikasiyası üçün sərhəd elementləri metodu ilə qurulmuş məsələnin diskret analoqunun həllinin iterasiya alqoritmi təklif olunmuşdur. (Evans, 2010) əsərində məkan dəyişənlərindən asılı olan aparıcı əmsalın riyazi həlli üçün sabitləşdirilmiş nöqtəli proyeksiya iterasiya metodu tətbiq olunmuşdur. P. N. Vabişçeviçin (Rogers, 1992) əsərlərində məkan dəyişənlərindən asılı olan üzv və ya kiçik əmsalın təyin olunması üçün iterasiya prosesi təklif və əsaslandırılmışdır. Bu proses sağ tərəfin ilkin yavaşmasının xüsusi şəkildə təyin olunması və hər iterasiyada dəqiqləşdirmə ilə həyata keçirilir. Cao və Lesnik (Chen, 2011) əsərlərində məkan dəyişənlərindən asılı olan kiçik əmsalın bərpası və eyni zamanda əmsal və ilkin şərtin bərpası üçün bənzər əyilmələr metodundan istifadə etmişlər.

Tədqiqatın aktuallığı.

Parabolik tənliklər zamanla dəyişən fiziki və mühəndislik proseslərini təsvir edən mühüm alətlərdən biridir. Bu tənliklər xüsusilə istilik ötürülməsi, maddə diffuziyası və elektromaqnit sahələrinin təhlilində geniş istifadə olunur. Bu sahələrdə mövcud olan problemlərin düzgün və dəqiq modelləşdirilməsi, həm elmi araşdırmalarda, həm də praktiki tətbiqlərdə müvəffəqiyyətin əsasını təşkil edir (Cannon, Lin, Wang, 2014).

Tədqiqat

Parabolik tənliklərin məkan dəyişənlərindən asılı olan sağ tərəfin identifikasiyası, bu cür tənliklərin daha real və dəqiq nəticələr verməsini təmin edir. Xüsusilə bu tənliklərə daxil edilən məkan şərtləri, sərhəd və daxili mənbələr, prosesin təbiətini və dinamikasını yaxşı başa düşməyə imkan verir. Bu aspektin öyrənilməsi mühüm əhəmiyyət kəsb edir, çünki məkan dəyişənlərindən asılı sağ tərəf sistemin davranışını dəyişdirən və nəticələri daha doğru proqnozlaşdırmağa kömək edən faktorlardır (Cao, Lesnic, 2019).

Müasir texnologiyalar və təcrübələr bu tənliklərə tətbiq edilən sərhəd şərtləri və məkan dəyişənlərinə bağlı olaraq yeni həllər və modellərin inkişafını tələb edir. Xüsusilə mühəndislik sahələrində istilik və maddə yayılması, kimyəvi reaksiyalar və digər dinamik proseslərin daha mürəkkəb və müxtəlif şəraitlərdə analizi və optimallaşdırılması tələbi artmaqdadır. Buna görə də, parabolik tənliklərin sağ tərəfinin identifikasiyası və bu asılılığın dərinindən təhlili mühüm aktual mövzudur (Dehghan, 2005).

Bu tədqiqatın məqsədi parabolik tənliklərin məkan dəyişənlərindən asılı olan sağ tərəfin identifikasiyasının tətbiqi sahələrindəki rolunu araşdırmaq, müxtəlif praktiki problemlərin həlli üçün daha uyğun modellər yaratmaq və bu sahədəki mövcud boşluqları doldurmaqdır. Beləliklə, bu mövzu mühəndislik, fizika və digər elm sahələrində geniş əhəmiyyət kəsb edir və inkişafı üçün əhəmiyyətli bir tədqiqat sahəsidir (Denisov, 2014).

1.1 Məsələnin qoyuluşu

Paralelepiped $\bar{\Omega} \subseteq R^d$ -də sərhəddi $\partial\Omega$ olan sahədə təyin olunmuşdur. Yalnız məkan dəyişənlərindən asılı olan $f(x)$ sağ tərəf əmsalının və $u(x,t)$ funksiyasının eyni vaxtda müəyyənəndirilməsi ilə bağlı tərs məsələni nəzərdən keçirək. Bu funksiyalar aşağıdakı parabolik tənliyi ödəməlidir (Gamzaev, Huseynzade, Gasimov, 2018):

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(k(x,t)\operatorname{grad} u) = f(x)g(x,t), \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T], \quad (1.1)$$

Burada $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)$, $g(x,t)$ verilmiş funksiyadır və

$$0 < k_1 \leq k(x,t) \leq k_2.$$

Aşağıdakı başlanğıc şərti verilir:

$$u(x, 0) = u^0(x), \quad x \in \bar{\Omega} \quad (1.2)$$

və Dirixle sərhəd şərtləri:

$$u(x, 0) = h(x, t), \quad x \in \partial\Omega \quad t \in (0, T]. \quad (1.3)$$

Tərs məsələni nəzərdən keçirərkən əlavə bir şərtin verilməsi tələb olunur. Məkan dəyişənlərindən asılı olan əmsalın müəyyən edilməsi üçün tərs məsələdə əlavə şərt kimi adətən son zamanda həllin ölçülmüş qiyməti (artıq müəyyənlik şərti) götürülür (Hamming, 1987):

$$u(x, T) = u^T(x), \quad x \in \Omega. \quad (1.4)$$

Məkan dəyişənlərindən asılı olan əmsalın müəyyən edilməsi ilə bağlı tərs məsələnin ədədi həlli zamanı tez-tez iterativ metodlardan istifadə olunur. Burada diskret keçid operatorunun özünə birləşməsinə əsaslanan birləşmiş qradientlər metodu (Fourier, 1878) təklif olunur. Metod hər bir iterasiya mərhələsində əsas tənlik üçün düz məsələnin həllinə əsaslanır, k iterasiyadan $k + 1$ iterasiyaya keçid zamanı iterativ parametrlər standart başlanğıc-sərhəd məsələsinin həllindən hesablanır. Bu metod kifayət qədər sadədir, effektivdir və tez yaxınlaşır.

1.2 Məsələnin həlli

Hesablama sahəsi $\Omega = \prod_{i=1}^d [0, l_i]$ paralelipiped olduğuna görə, hər bir istiqamətdə bərabər addımlı məkan şəbəkəsi x_i -ni quracağıq. Addımlar h_i ilə təyin olunur. Burada:

- ω - bütün daxili düyünlərinin çoxluğunu,
 - $\partial\omega$ - sərhəd düyünlərinin çoxluğunu ifadə edir,
 - Bütün düyünlərin sayı isə $N = \prod_{i=1}^d (N_i + 1)$ ilə göstərilir.
- Düyün nöqtələri aşağıdakı kimi verilir:

$$\omega_i = \{x_i = jh_i | j = 1, 2, \dots, N_i - 1, N_i h_i = l_i\}, \\ \omega = \prod_{i=1}^d \omega_i, \quad \bar{\omega} = \omega \cup \partial\omega$$

1.2.1 Məsələnin fərq analoqu

Operatoru $\mathcal{A}$ aşağıdakı kimi təyin edək:

$$\mathcal{A}_y = \sum_{i=1}^d \mathcal{A}^{(i)} y, \quad (1.5)$$

burada $\mathcal{A}^{(i)}$ – əsas tənliyin (1.1) x_i istiqaməti üzrə $\text{div}(k(x, t) \text{grad})$ – elliptik operatorunun diskret analoqudur və bu şəkildə verilir:

$$\mathcal{A}^{(i)} y = -(k^{(i)}(x, t) y_{x_i})_{x_i} \quad (1.6)$$

burada $k^{(i)}(x)$ [88]-ə uyğun olaraq aşağıdakı düsturla hesablanırsa bilər:

$$(k^{(i)}(x, t) = k(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + 0.5h_i, x_{i+1}, \dots, x_d, t). \quad (1.7)$$

Sərhəd şərtlərinin bircins olduğunu fərz edərək, qeyri-bircins hallarda sərhəd düyünlərində sağ tərəfi dəyişdirərək məsələni bircins sərhəd şərtləri ilə ifadə edə bilərik (Alexander, 2005). Hilbert

fəzasını aşağıdakı kimi təyin edək: $H = \mathcal{L}_2(\omega)$, burada şəbəkə funksiyaları $y(x), v(x) \in \mathbb{H}$, sərhəd düyünlərində $\partial\omega$ sıfıra bərabərdir. Skalyar hasil və norma aşağıdakı kimi müəyyən olunur:

$$(y, v) = \sum_{x \in \omega} y(x)v(x) \prod_{i=1}^d h_i, \quad \|y\| = \sqrt{(y, y)}.$$

[88]-ə əsasən, birölçülü operatorlar $\mathcal{A}^{(i)}$ öz-özünə birləşən, müsbət təyin olunmuş və məhdud operatorlardır. Buna görə də, $\mathcal{A}$ operatoru da öz-özünə birləşən, müsbət təyin olunmuş və məhdud operator olacaq:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^*, 8k_1 \sum_{i=1}^d \frac{1}{l_i} \leq \|\mathcal{A}\| \leq 4k_2 \sum_{i=1}^d \frac{1}{h_i}$$

burada k_1 və k_2 aşağıdakı şərtəndən götürülür: $0 < k_1 \leq k(x, t) \leq k_2$.

Beləliklə, (1.1)–(1.4) tərs məsələsi adi diferensial tənliklər sisteminin Koşi tərs məsələsinə çevrilir:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} + \mathcal{A}y = f(x)g(x, t), & x \in \omega \\ y(x, 0) = u^0(x) & x \in \bar{\omega} \end{cases} \quad (1.8)$$

və artıq müəyyənlik şərti verilir:

$$y(x, T) = u^T(x), \quad x \in \bar{\omega} \quad (1.9)$$

Fərz edək ki, y^m verilmiş məsələnin $t^m = m\tau$ zamanında yaxınlaşmış həllidir, burada τ zaman addımıdır və $M\tau = T$. İndi diferensial-fərq tənliyi (1.8)-ə aşağıdakı çəkili fərq sxemini uyğunlaşdırırıq, burada $\sigma \in (0, 1]$:

$$\frac{y^{m+1} - y^m}{\tau} + \mathcal{A}_{m+\sigma}(\sigma y^{m+1} + (1 - \sigma)y^m) = f(x)g(x, t_m + \sigma\tau) \quad (1.10)$$

İlkin və əlavə şərtlər isə aşağıdakı kimi verilir:

$$y^0(x) = u^0(x), \quad y^M(x) = u^T(x). \quad (1.11)$$

1.2.2 Qoşma Qradient Üsulunun tətbiqi

Fərq analoqu ilə verilmiş tərs məsələnin (1.10)–(1.11) həllini tapmaq üçün qoşma qradientlər üsuluna əsaslanan iterativ metodu istifadə edirik (Ames). Hər iterasiya mərhələsində standart ikiqat fərq sxemlərindən istifadə edərək düz məsələni həll edirik. Məsələnin müvafiq operator şəklində verilməsi və iterativ prosesi aşağıdakı kimi ifadə olunur.

Fərq sxemindən (1.10) və verilmiş başlanğıc şərtindən $y^0(x) = u^0(x)$ istifadə edərək son zaman nöqtəsində həlli əldə edə bilərik:

$$y^M(x) = u^T(x) = \mathcal{B}u^0(x) + \mathcal{C}f(x), \quad x \in \bar{\omega}$$

$$\mathcal{B} = \prod_{m=1}^M \mathcal{S}^m, \quad \mathcal{C} = \sum_{m=1}^M \tau \mathcal{L}^m, \quad (1.12)$$

Burada $\mathcal{S}^m$ - m -cı zaman qatından növbəti $(m + 1)$ -ci zaman qatına keçid operatorudur və aşağıdakı formada verilir:

$$\mathcal{S}^m = (\mathcal{L} + \sigma\tau\mathcal{A}_{m+\sigma})^{-1}(\mathcal{L} - (1 - \sigma)\tau\mathcal{A}_{m+\sigma}), \quad (1.13)$$

və sağ tərəfin operatoru $\mathcal{L}^m$ aşağıdakı kimi verilir:

$$\mathcal{L}^m = \prod_{j=1}^m g(x, t_m + \sigma\tau)(\mathcal{L} + \sigma\tau\mathcal{A}_{m+\sigma})^{-1} \quad (1.14)$$

Beləliklə, (1.10) və (1.11)-ə əsasən (1.1)–(1.4) tərs məsələsi aşağıdakı fərq-operator tənliyinin həllinə gətirib çıxarır:

$$\mathcal{C}f(x) = u^T(x) - \mathcal{B}u^0(x) \quad x \in \bar{\omega} \quad (1.15)$$

Operator $\mathcal{A}$ -nın öz-özünə qoşma olmasına görə, $\mathcal{L}^m$ operatoru da öz-özünə birləşəndir. Buna görə də, (1.15)-dəki $\mathcal{C}$ operatoru da öz-özünə qoşma operator olur. $\mathcal{C}$ -nin müsbət təyin olunması (1.15) operator tənliyinin həllinin mövcudluğunu və yeganəliyini təmin edir (Honjo, Kudo, 1998).

Aprior məlumatla ehtiyac duymadan iterasiya parametrlərinin müəyyən edilə bildiyi variasiya tipli iterasiya metodları iterasiya prosesinin səmərəliliyini artırmaq və iterasiya sayını azaltmaq üçün tətbiq edilə bilər (Ashyralyev, Sazaklioglu, 2017). Biz tərs məsələnin həlli üçün ən sürətli yaxınlaşan qoşma gradientlər üsulundan istifadə edəcəyik:

1. Fərz edək ki, $k = 0$, təsadüfi başlanğıc yaxınlaşması $f_0(x)$ və başlanğıc şərti $y_0^0(x) = u^0(x)$ seçərək, müvafiq sərhəd şərtləri ilə verilmiş parabolik tənliyin diskret analoqundan son zaman nöqtəsində düz məsələnin həllini $y_0^M(x)$ tapı bilərik:

$$\frac{y_0^{m+1} - y_0^m}{\tau} + \mathcal{A}_{m+\sigma}(\sigma y_0^{m+1} + (1 - \sigma)y_0^m) = f_0(x)g(x, t_m + \sigma\tau), \quad (1.16)$$

2. Başlanğıc uyğunsuzluğu hesablayırıq: $r_0(x) = \|y_0^M(x) - u^T(x)\|$, $x \in \omega$ və köməkçi funksiyanın başlanğıc yaxınlaşmasını başlanğıc uyğunsuzluğa bərabər götürürük: $p_0(x) = r_0(x)$, $x \in \omega$

3. Bütün $k \geq 0$ üçün parabolik tənliyin sağ tərəfinin köməkçi əmsalı ilə verilmiş düz məsələnin diskret analoqu üçün həlli tapırıq:

$$\frac{z_k^{m+1} - z_k^m}{\tau} + \mathcal{A}_{m+\sigma}(\sigma z_k^{m+1} + (1 - \sigma)z_k^m) = p_k(x)g(x, t_m + \sigma\tau) \quad (1.17)$$

ilkin şərtlərlə: $z_k^0(x) = 0$ və nəticədə z_k^M həllini son zaman nöqtəsində əldə edirik.

4. Birinci iterasiya parametrlərinin yeni qiymətini müəyyən edirik:

$$\alpha_k = (r_k, r_k) / (z_k, p_k). \quad (1.18)$$

5. Axtarılan sağ tərəfin və uyğunsuzluğun növbəti yaxınlaşmalarını aşağıdakı düsturlarla hesablayırıq (Bao, Li, 2007):

$$f_{k+1} = f_k + \alpha_k p_k, \quad r_{k+1} = r_k - \alpha_k p_k. \quad (1.19)$$

6. Növbəti iterasiya parametrlərini və köməkçi vektoru müəyyən edirik:

$$\beta_k = (r_{k+1}, r_{k+1}) / (r_k, r_k), \quad p_{k+1} = r_k + \beta_k p_k. \quad (1.20)$$

7. İterasiya prosesinin dayandırılma şərtini aşağıdakı kimi təyin edirik:

$$\|r_{k+1}\| / \|u^T\| < \varepsilon. \quad (1.21)$$

Dayandırılma şərti yerinə yetirildikdə iterasiya prosesi tamamlanır, əks halda $k = k + 1$ götürülür və 3-cü addıma geri qaydılır.

a. Ədədi eksperimentlərin nəticəsi

Parabolik tənliyin məkan dəyişənlərindən asılı olan sağ tərəfinin identifikasiyası üçün təklif olunan ədədi metodun imkanlarını nümayiş etdirmək məqsədilə bir neçə ədədi nümunə təqdim edirik (Fourier, 1878).

İterasiya proseslərinin faktiki yaxınlaşma sürətini qiymətləndirmək və iterasiya sayı artdıqca yaxınlaşma dəqiqliyinin necə sabitləşdiyini dəqiq müəyyən etmək üçün aşağıdakı iki xəta göstəricisi daxil edilmişdir (Belov, 2002):

$$Max \in = \max_{1 \leq i \leq n} |f_k(x_i) - f(x_i)|,$$
$$RSME = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (f_k(x_i) - f(x_i))^2}$$

burada $f_k(x_i)$ iterasiya addımında mənbə funksiyasının ədədi həllidir, $f(x_i)$ isə dəqiq həllidir.

Faktiki ölçmə məlumatları həmişə xətlərlə müşayiət olunduğuna görə, biz mənbənin müəyyən edilməsi üçün tərs məsələni əlavə şərtin səs-küylü verilmiş halında da nəzərdən keçiririk (Isakov, 1998). Beləliklə, ölçülmüş əlavə məlumatlar aşağıdakı kimi müəyyən edilir:

$$u_\delta^T(x) = u^T(x) + \delta\mu,$$

burada δ - səs-küy səviyyəsi, μ isə $[-0.5, 0.5]$ aralığında vahid paylanmadan generasiya edilmiş təsadüfi dəyişənlərdir. Səthləri hamarlamaq üçün Savitski-Qoley metodu istifadə olunur.

Misal

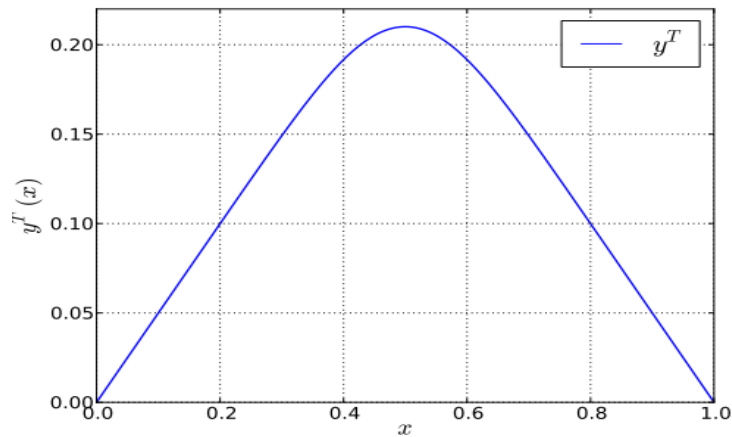
Bu misalda biz $[0, l]$ intervalında birölçülü məsələni aşağıdakı verilmiş şərtlərlə nəzərdən keçiririk:

$$k(x, t) = 1, \quad g(x, t) = 1, \quad u^0(x) = 0,$$

və sağ tərəf funksiyası $f(x)$ Qaus normal paylanmasına malikdir:

$$f(x) = \frac{1}{v\sqrt{2\pi}} \exp \frac{-(x-0.5l)^2}{2v^2}, \quad x \in [0, l].$$

Hesablamalarda $l = T = 1$ və $v = 0.1$ götürülür. Artıq müəyyənlik şərti sağ tərəfi məlum olan Qaus paylanması ilə düz məsələnin həlli vasitəsilə əldə edilir (Isakov, Meyers, 2012). Düz məsələ daha yüksək dəqiqlikli fərq sxemi ilə, $O(\tau^2 + h^4)$ yaxınlaşma dərəcəsi ilə və çəkili əmsal $\sigma = 0.5 - h^2/(12\tau)$ istifadə edilərək kifayət qədər ətraflı məkan-zaman şəbəkəsində, $N = M = 1200$ olmaqla həll olunur. Biz tərs məsələni düz məsələdən əldə edilən son həll nəticəsini əlavə şərt kimi istifadə edərək nəzərdən keçiririk (Hasanoglu, Romanov, 2017). Təklif olunan iterativ metodun tətbiqi isə daha kobud şəbəkədə, $N = M = 200$ iterasiya prosesinin dayandırılma şərti isə $\varepsilon = 10^{-7}$ olmaqla həyata keçirilir.

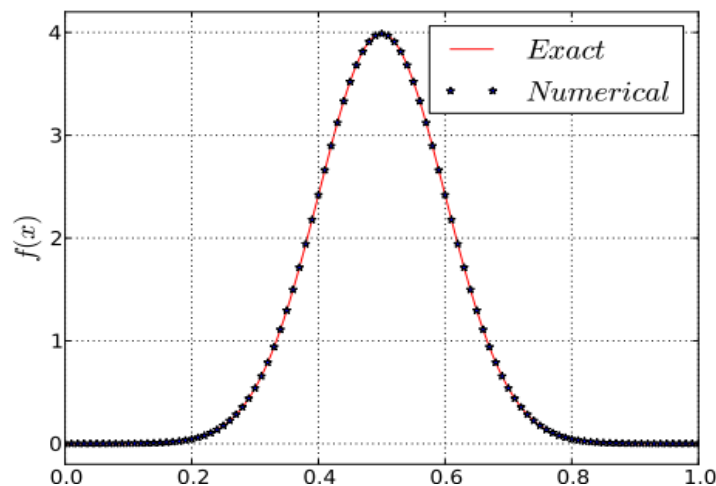


(a) son həll $y^T(x)$

Bu mərhələdə əldə olunan son həll $y^T(x)$, düz məsələnin həlli nəticəsində alınan və tərs məsələdə artıq müəyyənlik şərti kimi istifadə olunan funksiyadır. Bu həll, sağ tərəfi məlum olan Qaus paylanması ilə parabolik tənliyin inteqrasiyası nəticəsində tapılır.

$y^T(x)$ Düz məsələnin sonunda əldə olunan nəticə, $x \in [0, l]$.

Bu həll tərs məsələnin iterativ prosesində istifadə edilərək, məkan dəyişənlərindən asılı olan $f(x)$ funksiyasının dəqiq və ya yaxın həllinin tapılmasına xidmət edir.



(b) $f(x)$ funksiyası

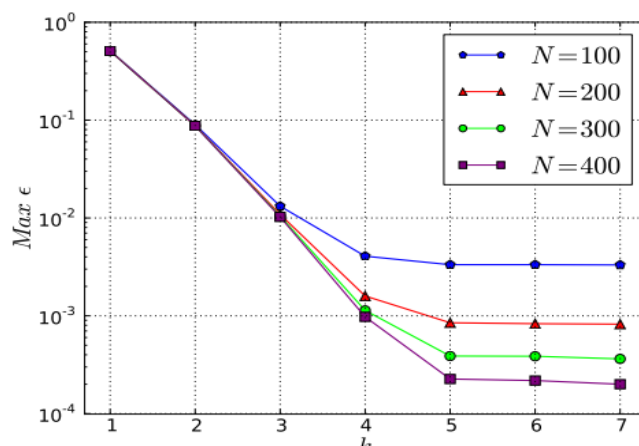
Şəkil 1.1: (a) son həll $y^T(x)$ və (b) $f(x)$ funksiyası

Şəkil 1.1-də düz məsələnin son zaman nöqtəsindəki həllinin qrafiki və sağ tərəf funksiyası $f(x)$ -in qrafikləri göstərilmişdir. Nöqtələr ədədi həllin qiymətlərini təmsil edir. Şəkildən göründüyü kimi, ədədi həll yüksək dəqiqliklə dəqiq həlli təkrarlayır.

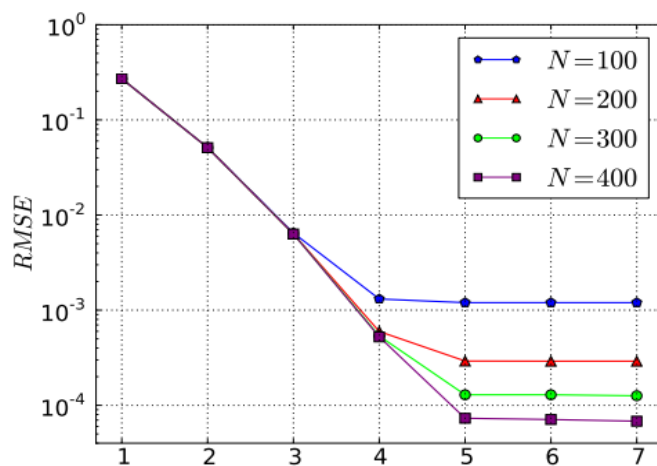
İterasiya proseslərinin faktiki yaxınlaşma sürətini qiymətləndirmək üçün şəkil 1.2-də müxtəlif məkan-zaman şəbəkələri üçün hər iterasiya addımında iki xəta göstəricisinin qrafikləri verilmişdir. Bu hesablamalarda biz $M = 200$ götürürük və fərqli N qiymətləri ilə iterasiya prosesinin dayandırılma şərtini $\varepsilon = 10^{-7}$ kimi müəyyən edirik (Rogers, 1992). Şəkillərdən göründüyü kimi, iterasiya prosesi çox sürətlə (5 iterasiya daxilində) yaxınlaşır və bölgü sayının artması ilə fərq sxeminin dəqiqliyi artır (Nazarov, Karchevsky, Vandamme, 2015).

Təklif olunan iterativ metodun dayanıqlığını qiymətləndirmək üçün artıq müəyyənlik şərti olaraq u_δ^T əvəzinə səs-küylü əlavə şərt u^T istifadə etməklə tərs məsələni nəzərdən keçiririk. Şəkil

1.3-də səs-küy səviyyəsi $\delta = 1\%$ və 3% olan hallarda tərs məsələnin ədədi həllinin nəticələri göstərilmişdir.

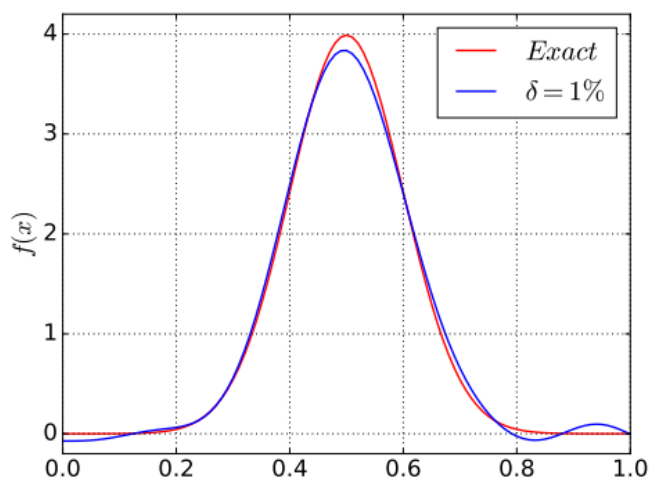


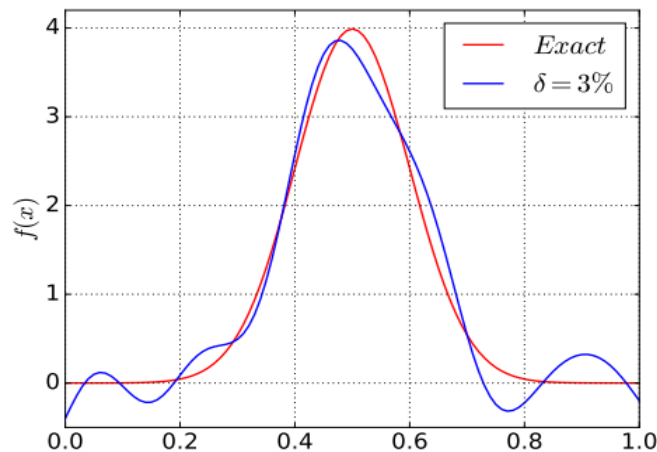
(a) $Max \epsilon$



(b) $RMSE$

Şəkil 1.2: (a) $Max \epsilon$ və (b) $RMSE$
 (a) $\delta = 1\%$





(b) $\delta = 3\%$

Şəkil 1.3: δ –nin fərqli qiymətdə nəticələri

Nəticə

Yekun olaraq, parabolik tənliklərdə sağ tərəfin identifikasiyası mühüm rol oynayır, çünki bu sağ tərəf, məsələnin fiziki və ya mühəndislik şərtlərinə uyğun müxtəlif mənbələri, təsirləri və ya məkan-şərait dəyişənlərini təmsil edə bilər. Parabolik tənliklər çox vaxt istilik və diffuziya tənlikləri, kontur şəklində proseslər və ya digər dinamik sistemlər üçün istifadə edilir. Parabolik tənliklər çox vaxt istilik keçiriciliyi, kimyəvi diffuziya və ya digər dinamik proseslərin təsvirində tətbiq olunur. Parabolik tənliklərdə sağ tərəfin identifikasiyası, məsələnin təbiətinə uyğun olaraq müxtəlif mütəxəssislər tərəfindən həyata keçirilən bir prosesdir və bu, yalnız nəzəri modelin qurulmasına deyil, həm də real dünya problemlərinin dəqiq həllinə imkan verir. Sağ tərəfin doğru identifikasiyası məsələnin həllini daha doğrulayan və tətbiq sahəsində daha effektiv nəticələr əldə etməyə imkan verir.

Ədəbiyyat

1. Alexander, G. R. (2005). *Inverse problems: Mathematical and analytical techniques with applications to engineering*. Springer-Verlag.
2. Ames, K. A. (n.d.). Improperly posed problems for nonlinear partial differential equations. In W. F. Ames (Ed.), *Nonlinear equations in the applied sciences*.
3. Ashyralyev, A., Sazaklioglu, A. U. (2017). Investigation of a time-dependent source identification inverse problem with integral overdetermination. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 38(10), 1276–1294.
4. Bao, G., Li, P. J. (2007). Numerical solution of inverse scattering for near-field optics. *Optics Letters*, 32(11), 1465–1467.
5. Belov, Y. Y. (2002). *Inverse problems for partial differential equations* (Vol. 32). Marcel Dekker.
6. Cannon, J. R., Lin, Y. P., Wang, S. M. (2014). Simultaneous determination of time dependent coefficients in the heat equation. *Computers & Mathematics with Applications*, 67(5), 1065–1091.
7. Cao, K., Lesnic, D. (2019). Simultaneous reconstruction of the perfusion coefficient and initial temperature from time-average temperature measurements. *Applied Mathematical Modelling*, 68, 523–539.
8. Chen, C. S. (2011). *Lecture note: A Localized MAPS*. Department of Mathematics, University of Southern Mississippi, USA.
9. Dehghan, M. (2005). Parameter determination in a partial differential equation from the

- overspecified data. *Mathematical and Computer Modelling*, 41(2–3), 196–213.
10. Denisov, A. M. (2014). Obratnaya zadacha dlya kvazilineynoy sistemy uravneniy v chastnykh proizvodnykh s nelokal'nym krayevym usloviyem. *Zhurnal Vychislitel'noy Matematiki i Matematicheskoy Fiziki*, 54(11), 1756–1766.
 11. Evans, L. C. (2010). *Partial differential equations* (2nd ed.). American Mathematical Society.
 12. Fourier, J. B. (1878). *The analytical theory of heat*. Cambridge University Press.
 13. Gamzaev, K., Huseynzade, S. O., Gasimov, G. A. (2018). Numerical method to solve identification problem for the lower coefficient and the source in the convection-reaction equation. *Cybernetics and Systems Analysis*, 54(6), 971–976.
 14. Hamming, R. W. (1987). *Numerical methods for scientists and engineers*. Dover Publications.
 15. Hasanoglu, A. H., Romanov, V. G. (2017). *Introduction to inverse problems for differential equations*. Springer International Publishing.
 16. Honjo, Y., Kudo, N. (1998). Matching objective and subjective information in geotechnical inverse analysis based on entropy minimization. In *Inverse Problems in Engineering Mechanics*, 263-271.
 17. Isakov, V. (1998). *Inverse problems for partial differential equations* (Vol. 127). Springer-Verlag.
 18. Isakov, V., Meyers, J. (2012). On the inverse doping profile problem. *Inverse Problems and Imaging*, 6, 465–486.
 19. Nazarov, L. A., Karchevsky, A. L., Vandamme, M. (2015). [Article title not specified]. *Journal of Mining Science*, 51, 666–672.
 20. Rogers, C. (1992). [Book title not fully specified]. *Mathematics in Science and Engineering*, 185, 1–29. Elsevier.

Daxil oldu: 24.11.2024

Qəbul edildi: 26.02.2025